Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

LICENCE L3S5 2011-2011
Mécanique des Fluides

TD –trainee-Corrigé

Dany Huilier – début novembre 2010

Traînée de sphères, de cylindres, de tout corps en mouvement

Support sur la toile :
Mots-clés : traînée de sphère, lois de Stokes, d'Oseen..viscosité
Polycopiés de Marc Rabaud (labo Fast, Université Paris-Sud)

Force de traînée
L'analyse dimensionnelle permet de quantifier une force de traînée F_D sur un corps en mouvement et isoler un coefficient de traînée uniquement fonction du nombre de Reynolds basé sur la vitesse de l'écoulement U, la viscosité cinématique du fluide ν et une longueur caractéristique de l'objet en mouvement (le diamètre D = 2R d'une sphère par exemple).
On aura

$F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$, $C_D = f(Re)$ où $Re = UD/\nu$ et $A = \pi R^2$

A étant l'aire de la section de l'obstacle (perpendiculaire au vecteur vitesse du fluide).

A très faible nombre de Reynolds, en traînée dite de Stokes (1845, 1851), on montre que les forces de pression (à hauteur d'une contribution de 1/3) et de viscosité (2/3) induisent une traînée totale égale à :

$F_D = 3\pi\mu DU$, où μ est la viscosité dynamique du fluide, ce qui donne un coefficient de traînée de

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

Lorsque le Reynolds n'est pas très petit devant l'unité, Oseen (1910,1927), Lamb (1911) a calculé le terme correcteur (valable si Re < 5) (développements asymptotiques):

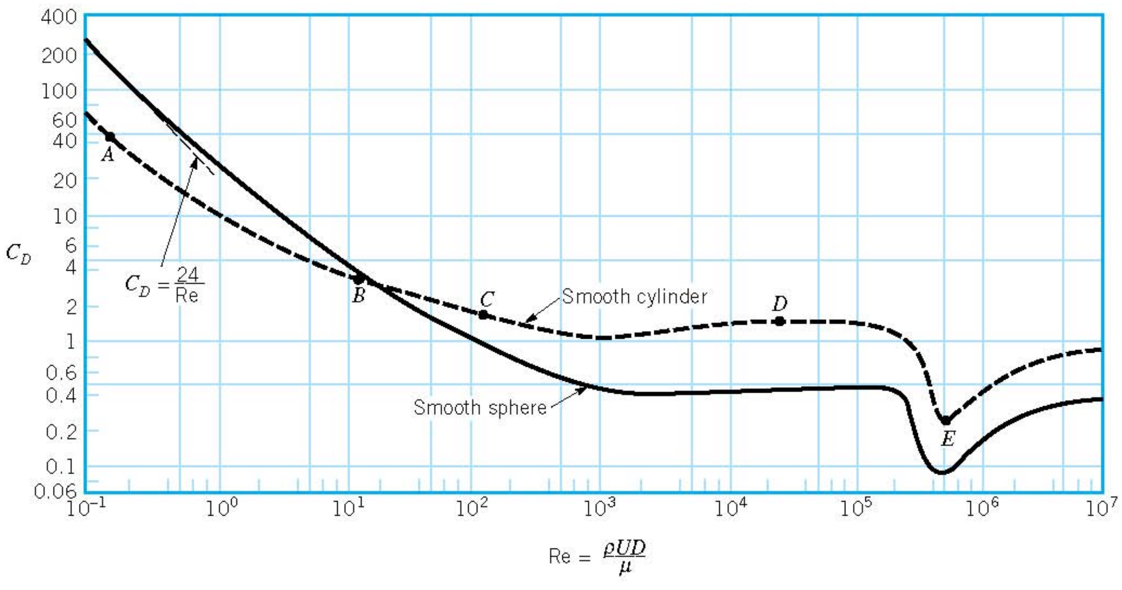
$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{3}{16}\mathrm{Re}\right)$$

Il existe ensuite des formules empiriques approchées qui donnent d'assez bons résultats jusqu'à la crise de traînée caractérisée par une chute brutale de C_D (Re < 400 000), par exemple la relation de White :

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} + \frac{6}{1+\sqrt{\mathrm{Re}}} + 0.4$$

ou pour des nombres de Reynolds plus faibles, de Schiller-Naumann (1933) (attention, valable pour Re < 800 seulement)

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}(1 + 0.15\,\mathrm{Re}^{0.687})$$



(a)

Evolution du coefficient de traînée d'une sphère ou d'un cylindre à surface lisse par unité de longueur en fonction du nombre de Reynolds (échelles logarithmiques) (Munson, Young & Okiishi, page 582, 4th edition)

Applications :

- Calculer de la traînée sur une balle de tennis à 200 km/h. R = 33 mm, $\nu_{air} = 15.10^{-6}$ m^2/s, $\rho_{air} = 1{,}23$ kg/m^3. Comparez au poids de la balle (m = 58 g).

Notons que si la sphère n'est pas lisse (cas d'une balle de golf par exemple, du duvet de la balle de tennis) il apparaît au moins une nouvelle variable sans dimension (par exemple le rapport rugosité/rayon comme sur la figure suivante.

A) Calcul « à la main » :

Une vitesse de 200 km/h correspond à U = 55.55 m/s

Calcul du Nombre de Reynolds : $\text{Re} = \dfrac{55.55\ x\ 0.066}{15\ 10^{-6}} = 244420$

Calcul du coefficient de traînée :

Graphiquement le coefficient de traînée est évalué approximativement à : 0.5

Formule de Schiller-Nauman : $C_D = \dfrac{24}{\text{Re}}(1 + 0.15\,\text{Re}^{0.687}) = 0.0741$

Valeur sous-estimée, ce qui est normal, la loi est valable jusqu'à un Reynolds de l'ordre de 800.

Formule de White : $C_D = \dfrac{24}{\text{Re}} + \dfrac{6}{1+\sqrt{\text{Re}}} + 0.4 = 0.412$

On prendra évidemment cette dernière valeur :

Calcul de la traînée :

$$F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D = \frac{1}{2} x 1.23\, x\, (55.55)^2\ x\ \pi\, x\, (0.033)^2\ x\ 0.412 = 2.675\ \text{N}$$

Informations du site : http://www.jayandwanda.com/tt/ballspeed_calc1.html

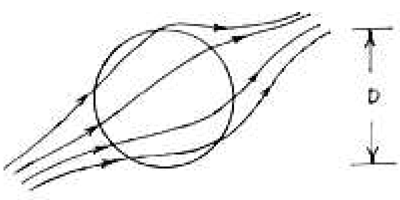
Ball	diameter (meters)	mass (Kilograms)
38 mm TT ball	0.038	0.0025
baseball	0.074787	0.148835
tennis ball	0.065	0.0577
golf ball	0.04267	0.04593

B) Le calculateur http://www.ecs.syr.edu/centers/simfluid/redder/dragforce/DragForce.html donne un nombre de Reynolds de Re = 246060 et une force de traînée de 3.193 N à 20°C
Dans ce calculateur :
The drag coefficient is a function of the Reynolds number Re, which depends on the flow velocity, the diameter of the sphere and the kinematic viscosity of the flowing medium. The functions relating Cd and Re were obtained by fitting experimental data by Bearman & Harvey (1976). Both the density and viscosity are selected by choosing the medium and temperature. The dependence of these on the temperature were obtained from White-Fluid Mechanics, Kuethe & Chowe- Foundations of aerodynamics and Shevell- Fundamentals of flight.

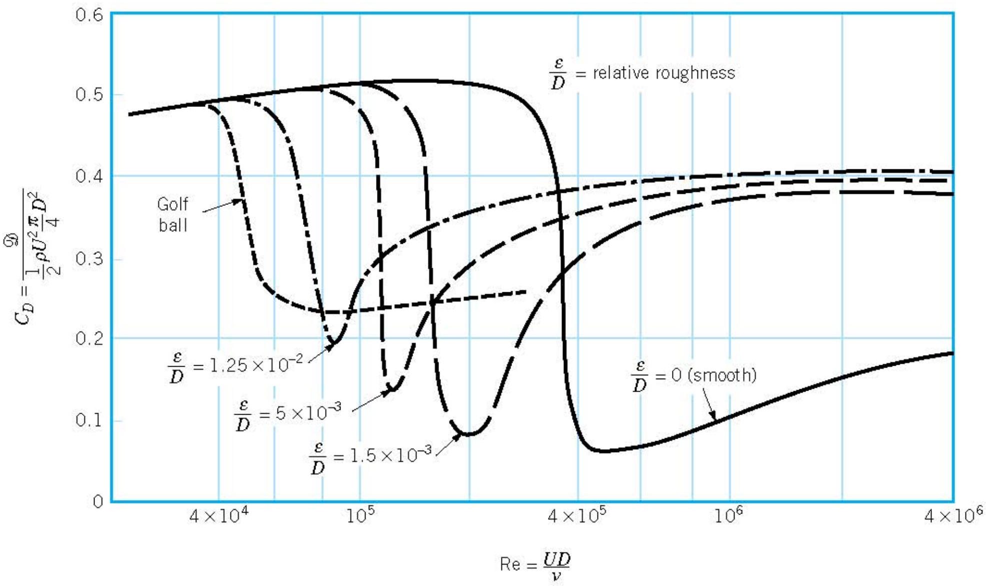
C) Calcul avec le calculateur de Mark Cramer :
http://www.fluidmech.net/jscalc/cdre01.htm
On trouve un nombre de Reynolds de 244 460, un coefficient de traînée de 0,41 et une force de traînée de 2,612 N.

First, choose the system of units: Metric
Next, choose the body: Sphere
Next, pick a fluid: Air
Enter the diameter: 0.066 in meters
Enter the freestream velocity: 55.56 in meters/second

I compute the Reynolds number to be: 2.4446*E5
The drag coefficient was computed to be: 0.41221
The drag was computed to be: 2.612 Newtons



Les résultats obtenus par les 2 méthodes sont cohérents.
Comparaison de la traînée au poids de la balle :
$P = mg = 50.10^{-3} \times 9{,}81 = 0{,}49$ N.
Le poids de la balle n'est donc pas négligeable par rapport à la force de traînée.



Evolution du coefficient de traînée d'une sphère en fonction du facteur de rugosité en fonction du nombre de Reynolds (Munson, Young & Okiishi, page 587, 4th edition)

De même, s'il existe plus d'une dimension (ellipsoide plutôt que sphère par exemple), alors l'analyse dimensionnelle prédit l'existence d'au moins un autre nombre sans dimension, par exemple le rapport grand axe sur petit axe *a/b* si on a affaire à une ellipsoïde de révolution. Ensuite le problème peut aussi dépendre de l'angle α entre l'axe de l'ellipsoïde et l'écoulement. Alors on aura $C_D = f(Re, a/b, \alpha)$.

Exercices :

● Calculer le fardage (force de traînée) dû au mât de 20 mètres de haut d'un voilier dans un vent de 30 Nœuds (~ 60 km/h) si R = 10 cm (le C_D d'un cylindre est environ le double de celui d'une sphère dans cette gamme de nombre de Reynolds).

On sait que 1 nœud nautique vaut 1.852 km.

D'après Wikipédia (5 novembre 2009) http://fr.wikipedia.org/wiki/N%C5%93ud_(unit%C3%A9)

Le **nœud** est une unité de vitesse utilisée en navigation maritime et aérienne. 1 nœud correspond à 1 mille marin par heure, soit exactement 1,852 km/h ou 0,514 m/s. Le **nœud** est une unité de vitesse utilisée en navigation maritime et aérienne. 1 nœud correspond à 1 mille marin par heure, soit exactement 1,852 km/h ou 0,514 m/s. On estimait autrefois la vitesse d'un navire à l'aide d'un loch à bateau. La planchette était amarrée à un cordage comportant des nœuds régulièrement espacés qu'un marin comptait à haute voix au fur et à mesure qu'ils glissaient entre ses doigts. Le compte se faisait pendant le temps d'écoulement d'un sablier. Le nombre résultant, exprimé en nœuds, mesure donc une vitesse et non une longueur.

Du fait des mesures anglo-saxonnes, on espaçait les nœuds de 47 pieds et 3 pouces (14,4 m) et on calibrait le sablier de manière à mesurer une période de 28 secondes[1]. Désormais, le nœud correspond exactement à une vitesse d'un mille marin par heure (soit 1 852 m/h), mais n'appartient pas au système international (SI). On utilise généralement pour cette unité les symboles **nd** ou **kt** (pour *knot*, *nœud* en anglais) ; les abréviations **kn** (pour *knot*) ainsi que **kts** (pour *knots*) sont aussi utilisées.

Le mille marin correspond à la valeur moyenne d'une minute d'arc de méridien. De fait, un nœud correspond à une minute de latitude parcourue en 1 heure.

La surface S affrontant le vent est le diamètre du mât (20 cm) fois sa hauteur de 20 m.

Viscosité cinématique de l'air : $\nu_{air} = 1.5 \text{ x } 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

A) Calcul « à la main » :

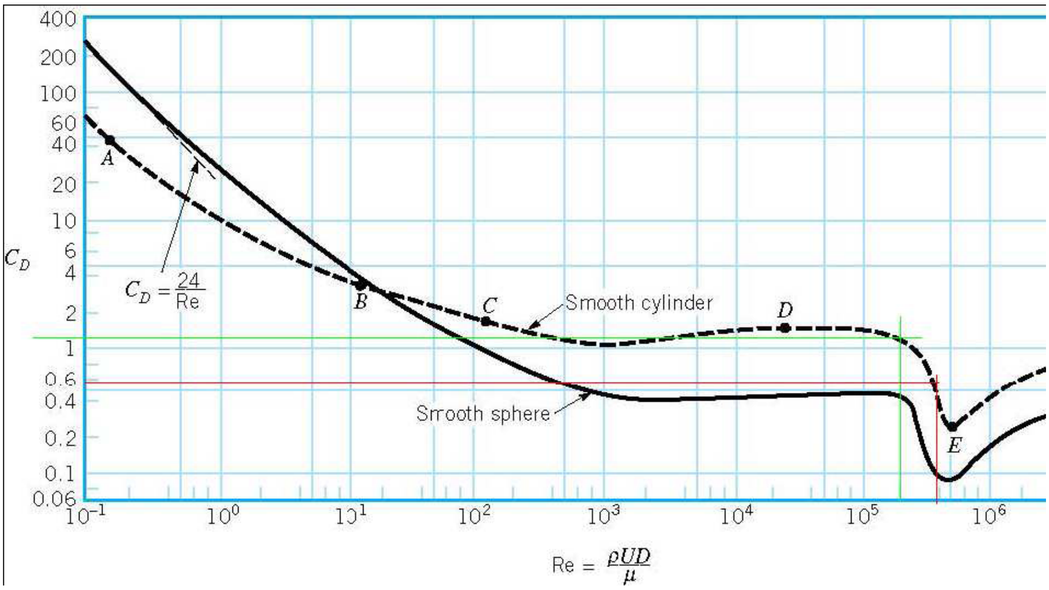
Calcul du Nombre de Reynolds :

La vitesse du voilier est de : $U = 30 \text{ x } 1.852 \text{ x}1000 \text{ m}/3600 \text{ s} = 15.433 \text{ m/s}$

$$Re = \frac{UD}{\nu_{air}} = (15.433 \text{ m/s x } 0.2 \text{ m}/(15 \text{ x } 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})) = 205\ 778$$

Calcul du coefficient de traînée :

On peut utiliser le graphique ci-dessous :



On en déduit un coefficient de traînée C_D de **1,27. (extrapolation des traits en vert)**
Calcul de la traînée :

$F_D = 0,5 \times \rho_{air} \times U^2 A C_D = 0,5 \times 1,23$ kg/m³ x $(15.433)^2$ (m/s)² x 20m x 0.2 m x 1,27 = **744 N**

C) Calcul avec le calculateur de Mark Cramer (lien qui n'existe plus) :

http://www.fluidmech.net/jscalc/cdre01.htm

First, choose the system of units: Metric
Next choose the body: Circular Cylinder
Next pick a fluid: Air
Enter the diameter: 0.20 in meters
Enter the freestream velocity: 15.43 in meters/second

I compute the Reynolds number to be: 2.0573*E5
The drag coefficient was computed to be: 0.59257
The drag was computed to be: 16.93 Newtons/meter of l

Le mât fait 20 mètres. La traînée par unité de longueur serait de 16.93 N/m
La force de traînée totale serait alors $F_D = 16,93 \times 20 =$ **338,6N**
On trouve donc un nombre de Reynolds de **205 730**, un coefficient de traînée de **0,59** et une force de traînée de **338,6N**.
Sur le graphique, nous avons trouvé un coefficient de traînée de 1,27. L'erreur du calcul de la traînée vient en fait d'une erreur dans le coefficient de traînée de la part du calculateur. (Voir courbe ci-dessus). A noter que le 10 janvier 2008, le calculateur était indisponible (email à Mark Cramer)

● Calcul de la traînée D sur une plaque plane infiniment mince (couche limite). Pour une plaque mince de largeur b et de longueur L (dans le sens de l'écoulement) on pose :

$C_D = F_D/(1/2.\rho U^2.A) = f(Re, b/L)$ avec $A = b.L$ et $Re = UL/\nu$.

Pour $Re < 10^5$, on trouve expérimentalement $C_D = 1.33\ Re^{-1/2}$.
Pour $Re > 10^5$, on trouve expérimentalement $C_D^{1/2}.\log(Re.C_D) \approx 0.242$

Calculer la force de traînée sur la quille d'un monocoque de type "60 pieds open". On prendra b = 3m, L = 0.5 m, U = 10 nœuds (miles nautiques), $\nu_{eau} = 10^{-6}\ m^2/s$, $\rho_{eau} = 1000\ kg/m^3$. On trouve alors $C_D \sim 3{,}7\ 10^{-3}$ et $F_D = 73$ Newtons (à vérifier). On trouverait certainement nettement plus en tenant compte de l'incidence non nulle de la quille.

Vitesse du monocoque :

$$U = 10 \text{ x } 1832/3600 = 5.088 \text{ m/s}$$

Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{5.088 \text{ x } 0.5}{10^{-6}} = 2.54 \text{ x } 10^6 \quad > 10^5$$

On prendra alors $C_D = 3.7 \text{ x } 10^{-3}$

qui vérifie à peu près $C_D^{1/2}.\log(Re.C_D) \approx 0.242$ (en fait ≈ 0.238)

La force de traînée est alors :

$$F_D = \frac{1}{2} C_D.\rho_{eau} U^2.bL = \frac{1}{2} \text{x } 0.0037 \text{ x } 1000\,kg/m^3.(5.088 \text{ m/s})^2.3m \text{ x } 0.5 \text{ m} = 71.84 \text{ N}$$

● En ces temps de record . . .En athlétisme et particulièrement pour un 100 mètres il paraît que l'on ne peut espérer battre un record du monde par temps froid. Ceci est sans doute dû à l'augmentation de la force de traînée avec une baisse de température. En effet de 30°C à 10°C, la masse volumique de l'air ρ_{air} augmente d'environ 6 % , ce qui augmente d'autant la force de traînée $F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$.

Pour les gaz parfaits : $\frac{p}{\rho} = nRT$ **, soit à pression constante :** $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dT}{T} = \frac{20}{293}$

Regardez sur la toile l'influence de la température sur la viscosité cinématique des fluides.

● Toujours en athlétisme la plupart des records ne sont validés que si le vent favorable est inférieur à 2 m/s. Regardons l'effet sur la force de traînée d'un vent favorable de 2 m/s. Un coureur de 100 m a une vitesse de l'ordre de 100 m/10 s = 10 m/s. Il a donc selon qu'il y a du vent ou pas une vitesse relative de 8 ou 10 m/s. Comme la force de traînée $F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$ varie comme le carré de la vitesse apparente, la force de traînée avec un vent dans le dos de 2 m/s est près de 40% plus faible que sans vent. C'est donc un énorme avantage….L'inverse est vrai aussi pour les vents de face, ou de travers, néfastes à des records du monde. **Qu'en est-il pour les fameux records potentiels en altitude ?? (Mexico)**

● Expliquez pourquoi une balle de golf comporte des alvéoles, pourquoi une balle de tennis de table est lisse.

Traînée d'une tour – réservoir d'eau
Source : Munson et al. Page 590

On considère un réservoir d'eau (figure ci-dessous) dans un écoulement atmosphérique de 60 mph (miles per hour, 1 mile terrestre = 1609 m). Par ailleurs 1 foot = 1pied = 0.33 m

Pour les conversions d'unités US/GB en SI par exemple utiliser le site :

http://www.grc.nasa.gov/WWW/winddocs/cff/factors.html

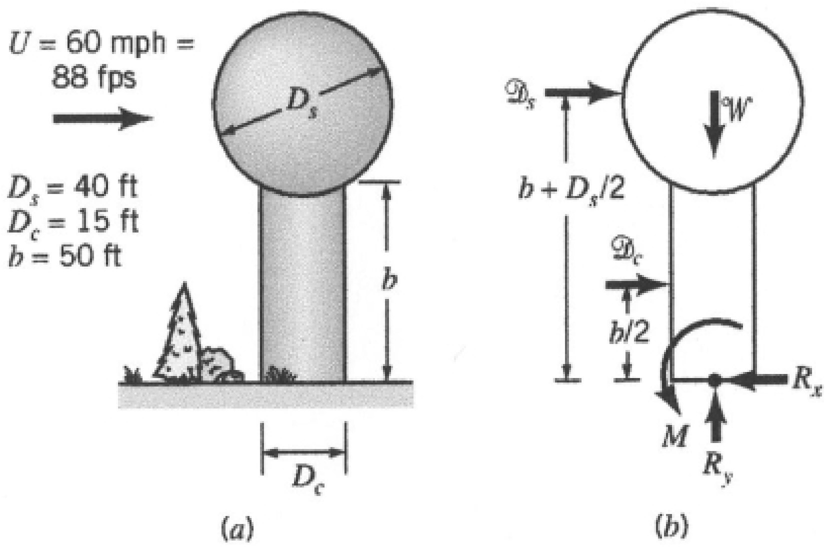
Pour la force : 1 Newton = 0.22481 lbf, 1 lb = 4.4482 N
Pour le poids 1 slug ≈ 1/14,5939029372064 kg = 0.06852 kg.
La masse volumique de l'air sera, sachant que 1 $\text{slug}/\text{ft}^3 = 515.3788\ \text{kg}/\text{m}^3$:
Soit encore

$$U = (88\ \text{ft}/\text{s}) = 0.3048\ \text{x}\ 88\ \text{m}/\text{s} = 26.82\ \text{m}/\text{s}$$
$$D_s = 40\ \text{ft} = 40\ \text{x}\ 0.3048\ \text{m} = 12.19\ \text{m}$$
$$D_c = 15\ \text{ft} = 15\ \text{x}\ 0.3048\ \text{m} = 4.572\ \text{m}$$
$$b = 50\ \text{ft} = 50\ \text{x}\ 0.3048\ \text{m} = 15.24\ \text{m}$$

$$\nu_{air} = 1.57\ \text{x}\ 10^{-4}\ \text{ft}^2/\text{s} = (0.3048)^2\ \text{x}\ 1.57\ \text{x}\ 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s} = 14.58\ \text{x}\ 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$$

$$\rho_{air} = 2.38\ \text{x}\ 10^{-3}\ \text{slugs}/\text{ft}^3 = 515.3788\ \text{x}\ 2.38\ \text{x}\ 10^{-3} = 1.2266\ \text{kg}/\text{m}^3$$

Pour la traînée de la tour et le moment des forces de traînée, ce qui conditionne l'ancrage au sol pour éviter le basculement de l'ouvrage.



On va considérer la tour comme une association d'un cylindre circulaire surmonté par une sphère, et nous supposerons que la traînée totale résulte de la somme de la traînée des 2 associations géométriques.

Dans des conditions d'atmosphère standard les nombres de Reynolds sont :

- pour la sphère en unités anglo-saxonnes :

$$\mathrm{Re}_s = \frac{UD_s}{\nu_{air}} = \frac{(88\,\mathrm{ft/s})(40\,\mathrm{ft})}{1.57 \text{ x } 10^{-4}\ \mathrm{ft^2/s}} = 2.24 \text{ x } 10^7$$

Soit encore

$$U = (88\ \mathrm{ft/s}) = 0.3048 \text{ x } 88\ \mathrm{m/s} = 26.82\ \mathrm{m/s}$$
$$D_s = 40\ \mathrm{ft} = 40 \text{ x } 0.3048\ \mathrm{m} = 12.19\ \mathrm{m}$$
$$D_c = 15\ \mathrm{ft} = 15 \text{ x } 0.3048\ \mathrm{m} = 4.572\ \mathrm{m}$$
$$b = 50\ \mathrm{ft} = 50 \text{ x } 0.3048\ \mathrm{m} = 15.24\ \mathrm{m}$$

$$\nu_{air} = 1.57 \text{ x } 10^{-4}\ \mathrm{ft^2/s} = (0.3048)^2 \text{ x } 1.57 \text{ x } 10^{-4}\ \mathrm{m^2/s} = 14.58 \text{ x } 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$$

Soit

$$\mathrm{Re}_s = \frac{UD_s}{\nu_{air}} = \frac{(26.82\,\mathrm{m/s})(12.19\,\mathrm{m})}{14.58 \text{ x } 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}} = 2.242 \text{ x } 10^7$$

A ce nombre de Reynolds, on peut estimer le coefficient de traînée à $C_D = 0.3$

La force de traînée de la sphère sera :

$$\mathrm{Drag}_{sphere} = \frac{1}{2}(2.38 \text{ x } 10^{-3}\ \mathrm{slugs/ft^3})(88\ \mathrm{ft/s})^2\,\frac{\pi}{4}(40\ \mathrm{ft})^2.(0.3) = 3470\ \mathrm{lb} = 4.4482 \text{ x } 3470 = 15435\,\mathrm{N}$$

$$\mathrm{Drag}_{sphere} = \frac{1}{2}(1.2266\ \mathrm{kg/m^3})(26.82\ \mathrm{m/s})^2\,\frac{\pi}{4}(12.19\ \mathrm{m})^2.(0.3) \approx 15445\,\mathrm{N}$$

- pour le cylindre, le nombre de Reynolds est :

$$\mathrm{Re}_C = \frac{UD_C}{\nu_{air}} = \frac{(88\,ft/s)(15\,ft)}{1.57\ x\ 10^{-4}\ ft^2/s} = 8.41\ x\ 10^6$$

$$\mathrm{Re}_C = \frac{UD_C}{\nu_{air}} = \frac{(26.82\,m/s)(4.572\,m)}{14.58\ x\ 10^{-6}\ m^2/s} = 8.41\ x\ 10^6$$

On estime le coefficient de traînée à $C_D = 0.7$

La force de traînée du cylindre sera :

$$\mathrm{Drag}_{cylinder} = \frac{1}{2}(2.38 \text{ x } 10^{-3}\ \mathrm{slugs/ft^3})(88\ \mathrm{ft/s})^2\,\frac{\pi}{4}(50 \text{ x } 15\ \mathrm{ft})^2.(0.7) = 4840\ \mathrm{lb} = 4.4482 \text{ x } 4840 = 21530\,\mathrm{N}$$

$$\mathrm{Drag}_{cylinder} = \frac{1}{2}(1.2266\ \mathrm{kg/m^3})(26.82\ \mathrm{m/s})^2 \text{ x } (15.24 \text{ x } 4.572\ \mathrm{m}).(0.7) \approx 22208\,\mathrm{N}$$

La force de réaction au sol :

$$\mathrm{Rx} = \mathrm{Drag}_{sphere} + \mathrm{Drag}_{cylinder} = 15435 + 21530\ \mathrm{N} \approx 37000\ \mathrm{N}$$

Le moment nécessaire à empêcher la tour réservoir de basculer et de rester ancré au sol sera donné, en supposant que les forces de traînée s'appliquent au centre de la sphère et du cylindre, par :

$$M = \mathrm{Drag}_{\mathrm{Sphere}} \ \mathrm{x} \ (b + D_S / 2) + \mathrm{Drag}_{\mathrm{cylinder}} \ \mathrm{x} \ b/2$$

$$M = 3470 \ \mathrm{lb}\left(50 \ \mathrm{ft} + \frac{40}{2} \ \mathrm{ft}\right) + 3840 \ \mathrm{lb}\left(\frac{50}{2} \mathrm{ft}\right) = 3.64 \ \mathrm{x} \ 10^5 \ \mathrm{ft.lb}$$

$$M = 15435 \, \mathrm{N}(70 \ \mathrm{x} \ 0.3048 \ \mathrm{m}) + 21530 \ \mathrm{N}\left(\frac{50 \ \mathrm{x} \ 0.3048}{2} \mathrm{m}\right) = 493380 \ \mathrm{N.m}$$

● Allez sur le site de Mark Cramer, du Virginia Tech, et utilisez le calculateur de calcul de traînée en ligne (éventuellement, il faudra installer le javascript pour activer les applets, pour microsoft, installation facile) . Tester le par rapport aux figures que vous avez.

Homepage de MarkCramer : http://www.fluidmech.net/msc/
calculateur : http://www.fluidmech.net/jscalc/cdre01.htm
http://www.ecs.syr.edu/centers/simfluid/redder/dragforce/DragForce.html
http://www.roymech.co.uk/Related/Fluids/Fluids_Drag.html
http://www.aoe.vt.edu/~neu/aoe3054/manual/expt3/text.html
http://www.martindalecenter.com/Calculators4_9_FluD.html#FLUID-TOOLS
http://www.martindalecenter.com/Calculators4_9_FluD.html
http://www.lmnoeng.com/
http://www.ecs.syr.edu/centers/simfluid/redder/dragforce/DragForce.html
http://www.jayandwanda.com/tt/ballspeed_calc1.html
http://www.adl.gatech.edu/adl0/adl00aero.html
à explorer
http://users.rowan.edu/~wyrick/Fluids/fluids_exam/finalexam_solution.pdf
balles de golfs
http://www.sciam.com/article.cfm?id=how-do-dimples-in-golf-ba
http://aerodyn.org/Drag/speed-drag.html
http://www.aerospaceweb.org/question/aerodynamics/q0215.shtml