Ressaut hydraulique

Le ressaut hydraulique est un phénomène qui se manifeste dans les écoulements à surface libre et qu'il est très facile d'observer dans un évier à fond bien plat. Lorsque le jet d'eau sortant du robinet touche la surface de l'évier, le jet s'étale en une nappe circulaire.

Si l'on choisit bien le débit, la nappe d'eau change brusquement d'épaisseur à une distance du centre de l'ordre d'une dizaine de cm. La zone centrale de la nappe est plus mince que la zone externe ; sa surface apparaît également beaucoup plus lisse. Ce brusque changement d'épaisseur est le "ressaut hydraulique". Ce phénomène est couramment observé en aval des déversoirs de barrage et est lié à des ondes de gravité stationnaires. Une vague déferlante (type tsunami, mascaret) est une version globalement mobile de ce phénomène, le ressaut se déplace alors à la vitesse de déferlement.

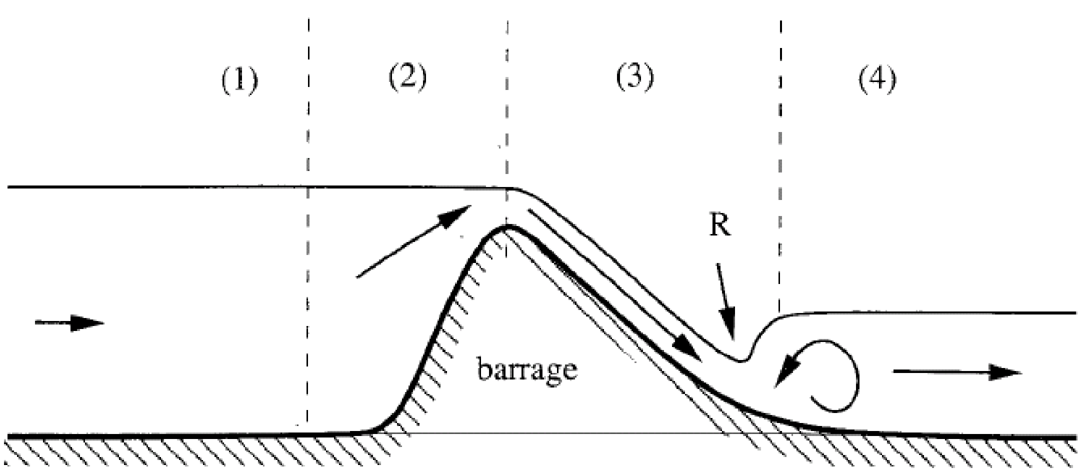


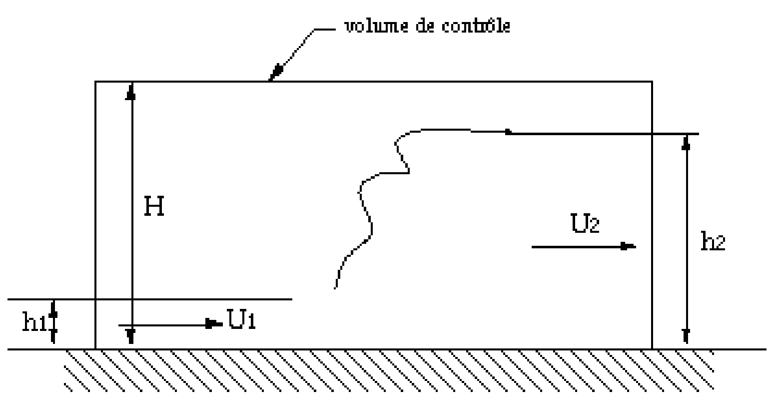
Figure : Apparition d'un ressaut hydraulique dans un déversoir en aval d'un barrage. La zone en amont (1) est de faible vitesse, suivie d'une zone d'accélération (2), d'une zone à grande vitesse (3) jusqu'au ressaut (R) impliquant une zone finale (4) de faible vitesse en aval.

Le *ressaut hydraulique* est une surélévation brusque de la surface libre d'un écoulement. Ce phénomène peut s'observer en particulier dans le déversoir en aval d'un barrage : l'écoulement, à faible vitesse en amont du barrage (1), s'accélère à l'approche de celui-ci (2), atteint une grande vitesse dans le déversoir (3) puis présente une transition brusque (ressaut) vers une zone de faible vitesse (4) ; on a en l'occurrence passage brutal du régime torrentiel (3) au régime fluvial (4) (de façon analogue au passage du régime supersonique au régime subsonique à la traversée d'une onde de choc droite en aérodynamique). Dans le cas du ressaut à l'aval d'un barrage ou, plus simplement, de celui qui se produit classiquement au fond d'un lavabo lorsque le jet du robinet impacte la vasque, le ressaut est *stationnaire*. Un ressaut hydraulique *en mouvement* correspond au phénomène du *mascaret* : un "mur d'eau" peut se former lorsque la marée montante remonte le cours d'une rivière. On assimile dans ce problème le ressaut (stationnaire ou non) à une onde de discontinuité en vitesse et en hauteur de fluide.

L'origine physique du ressaut est liée aux ondes de surface qui se propagent à la surface de l'eau. Lorsque l'épaisseur d'eau est très faible, c'est-à-dire beaucoup plus petite que la longueur d'onde des ondes de surface, la vitesse de propagation des ondes est celle des ondes dites de gravité $\sqrt{gh}$, où h est la hauteur d'eau. L'épaisseur de la nappe d'eau qui s'étale est constante. La conservation du débit impose alors que la vitesse décroisse de façon inversement proportionnelle au rayon. Si la vitesse au centre est supérieure à la vitesse de propagation, il existe un rayon critique au-delà duquel la vitesse devient inférieure à la vitesse de propagation. Ce rayon critique correspond `a la position du ressaut. On appelle nombre de Froude, le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse de propagation des ondes de surface (***William Froude (1810- 1878) ingénieur et architecte naval anglais, créateur du premier bassin à carène***)

$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gh}}$$

Au franchissement du ressaut, le nombre de Froude passe d'une valeur supérieure à 1 à une valeur inférieure à 1.



Afin de préciser les relations existant entre les hauteurs d'eau et vitesses en amont et en aval du ressaut, nous considérons le cas d'un écoulement unidirectionnel et non plus axisymétrique. Appliquons la relation de conservation de l'impulsion à un volume de contrôle qui englobe le ressaut. Si nous négligeons les effets dus à la viscosité, il suffit d'écrire l'égalité entre l'intégrale du flux convectif de quantité de mouvement _u_iu_j et l'intégrale de la pression sur la surface limitant le volume de contrôle. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'assez loin en amont et en aval du ressaut, le champ de vitesse est unidirectionnel : la composante verticale de vitesse est nulle. Donc, l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe vertical se réduit à l'équation de l'hydrostatique.

Dans la section 1 de l'écoulement, on a comme distribution de pression :

- $p_1 = p_0 + \rho g(h_1 - z)$, pour $0 < z < h_1$, soit une distribution hydrostatique
- $p_1 = p_0$, pour $h_1 < z < H$

et dans la section 2 :

- $p_2 = p_0 +$ _$g(h_2 - z)$, pour $0 < z < h_2$
- $p_2 = p_0$, pour $h_2 < z < H$

où p_0 est la pression atmosphérique.

Rappel : Théorème d'Euler (forme intégrale de quantité de mouvement en fluide parfait)

De manière générale si on considère un volume fixe V dans l'espace (appelé volume de contrôle), fermé par une surface S, $\vec{n}$ étant le vecteur normal local à un élément de surface dS, la forme intégrale des équations d'Euler est :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})dV + \iint_S(\rho\vec{v}.\vec{n})\vec{v}dS = \sum\vec{F} \qquad (1)$$

où $\vec{F}$ représente les forces non visqueuses (pression p, forces de volume $\vec{f}$ …) s'exerçant sur le volume V dans le cadre des fluides parfaits. En fait, dans ce cas, le terme de droite se réduit à:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})dV + \iint_S(\rho\vec{v}.\vec{n})\vec{v}dS = \sum\vec{F} = \iiint_V \rho\vec{f}dV - \iint_S p\vec{n}dS \qquad (1bis)$$

La conservation de l'impulsion (de quantité du mouvement) projetée suivant l'horizontale, impose donc, sur le volume de contrôle :

$$-\rho U_1^2 h_1 + \rho U_2^2 h_2 = \int_0^H p_1(z)dz - \int_0^H p_2(z)dz$$

soit

$$\rho(U_2^2 h_2 - U_1^2 h_1) = p_0(H - h_1) + p_0 h_1 + \rho g\frac{h_1^2}{2} - p_0(H - h_2) - p_0 h_2 - \rho g\frac{h_2^2}{2}$$

Soit encore :

$$\rho(U_2^2 h_2 - U_1^2 h_1) = \rho g \frac{h_1^2}{2} - \rho g \frac{h_2^2}{2}$$

En tenant compte de la conservation du débit volumique : $U_1 h_1 = U_2 h_2$,
l'équation devient :

$U_1^2 = \frac{g}{2}\frac{h_2}{h_1}(h_1 + h_2)$ et par inversion des indices : $U_2^2 = \frac{g}{2}\frac{h_1}{h_2}(h_1 + h_2)$

Supposons que la hauteur h_2 soit supérieure à h_1 et comparons la vitesse U_1 à la vitesse de propagation des ondes de surface dans la section 1, donnée par $c_1 = \sqrt{gh_1}$.

$$U_1^2 = gh_1\left[\frac{h_2}{2h_1}(1+\frac{h_2}{h_1})\right] = c_1^2\left[\frac{h_2}{2h_1}(1+\frac{h_2}{h_1})\right]$$

Si $h_2 > h_1$, nous voyons immédiatement que U_1 est supérieur à la vitesse de propagation des ondes. Un calcul similaire nous montrerait que U_2 est inférieur à $\sqrt{gh_2}$. L'écoulement en amont du ressaut est supercritique alors que l'écoulement en aval est sous-critique. Ceci explique que les perturbations de surface en amont ne peuvent se propager que vers le ressaut, alors qu'en aval, elles peuvent se propager dans les deux directions. Le ressaut constitue un "point d'accumulation" pour les ondes de surface.
Si on reprend l'équation précédente en supposant connu les conditions amont (U1, h1), on peut la considérer comme une équation du deuxième degré en h2 :

$$gh_2^2 + gh_1 h_2 - 2U_1^2 h_1 = 0$$

Si on en prend la racine positive :

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{U_1}{U_2} = \frac{-gh_1 + \sqrt{g^2 h_1^2 + 8U_1^2 g h_1}}{2gh_1} = \frac{-1+\sqrt{1+8Fr_1}}{2}$$

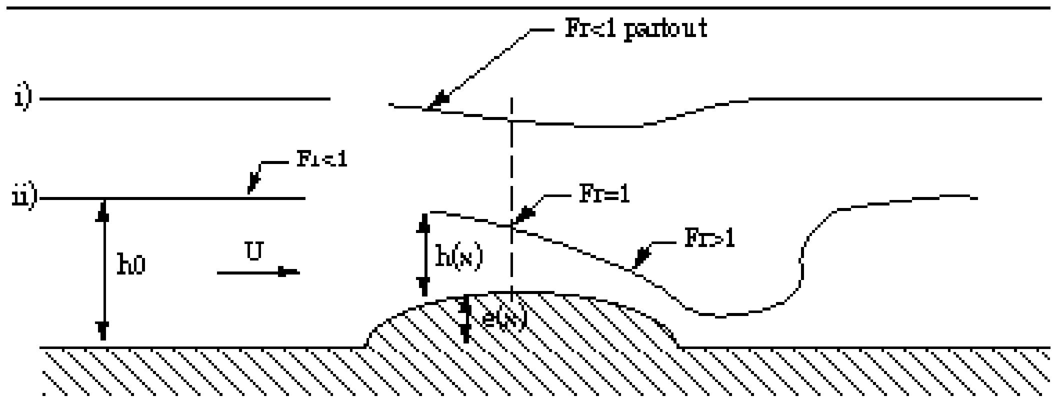
où Fr_1 est le nombre de Froude amont. En particulier :

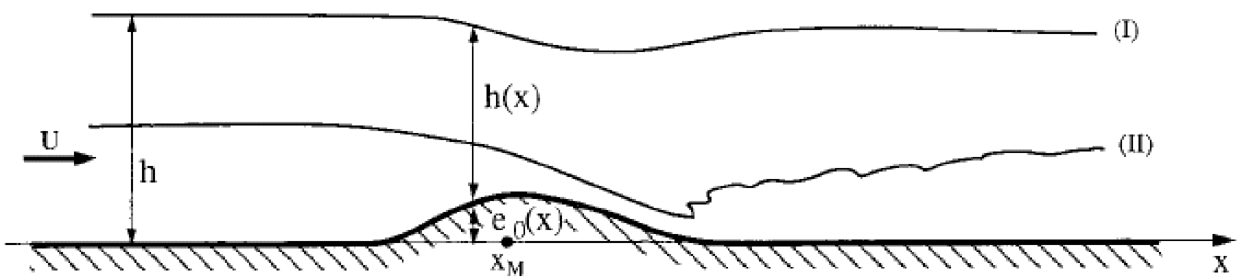
- $h_2 > h_1$ si $Fr_1 > 1$
- $h_2 = h_1$ si $Fr_1 \approx 1$

Physiquement le ressaut est une structure stable dans ce sens car les ondes de surface (à vitesse $\sqrt{gh_2}$) ne peuvent remonter la partie amont plus rapide ($U_1 > \sqrt{gh_2}$). Inversement ces mêmes ondes de surface à vitesse $\sqrt{gh_2}$ peuvent remonter de l'aval car $U_2 < \sqrt{gh_2}$, donc vers le ressaut pour s'y stabiliser.

Ressaut hydraulique – écoulement à surface libre en eau/canal peu profonde.

On considère un écoulement de type canal, rivière à fond plat rencontrant un obstacle local d'élévation e(x), hauteur de fond par rapport au niveau nul en amont et en aval. La couche liquide en x sera donnée par h(x). La pression à la surface libre est la pression atmosphérique.
On supposera la vitesse uniforme dans chaque section x (on néglige la couche limite peu épaisse au fond).





L'application de la relation de Bernoulli va nous permettre d'étudier la déflection de la surface libre d'un écoulement dans un canal, lorsqu'une surélévation est placée dans le fond du canal. Nous supposons que les effets visqueux sont négligeables (la hauteur de couche limite au fond du canal est négligeable) et que la vitesse du fluide est la même (uniforme) sur toute la hauteur du canal. Notons U_0 et h_0 la vitesse et l'épaisseur de l'écoulement loin en amont de l'obstacle ; U(x), h(x) et e(x) sont respectivement la vitesse du fluide, l'épaisseur de l'écoulement et la hauteur de l'obstacle en fonction de la position le long de l'écoulement.

La conservation du débit impose : $Q = U(x)h(x) = U_0h_0$
soit en dérivant par rapport à x :

$$\frac{dh(x)}{dx}U(x) + \frac{dU(x)}{dx}h(x) = 0$$

Soit encore en divisant par U(x)h(x) :

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dh(x)}{dx} = -\frac{1}{U(x)}\frac{dU(x)}{dx}$$

U(x) et h(x) varient forcément en sens inverse.

La relation de Bernoulli appliquée sur une ligne de courant affleurant la surface libre donne :

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2 + \rho g h_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2(x) + \rho g(h(x) + e(x))$$

soit, en dérivant par rapport à x et en utilisant la conservation du débit :

$$\rho U(x)\frac{dU(x)}{dx} + \rho g\left(\frac{dh(x)}{dx} + \frac{de(x)}{dx}\right) = 0$$

Et par élimination de dh(x)/dx :

$$\frac{1}{U(x)}\frac{dU(x)}{dx}\left\{U^2(x) - gh(x)\right\} + g\frac{de(x)}{dx} = 0$$

On se place dans le cas d'un écoulement assez lent initial en amont de type fluvial (dit sous-critique) et une épaisseur/profondeur suffisante pour vérifier la relation :

$$U_0^2 h_0 - gh_0 < 0$$

Soit un nombre de Froude inférieur à 1 : $Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}} < 1$

La vitesse des ondes de gravité locales en surface sur un film d'épaisseur h_0 étant donnée par :

$$c_0 = \sqrt{gh_0}$$

Dans ce cas de figure si l'on aborde l'obstacle par l'amont :

$$\frac{de(x)}{dx} > 0$$

$$\frac{1}{U(x)}\frac{dU(x)}{dx}\left\{U^2(x) - gh(x)\right\} = -g\frac{de(x)}{dx} < 0$$

Comme par prolongement de l'amont, on d'abord :

$$U^2(x) - gh(x) < 0$$

Il vient que $\frac{dU(x)}{dx} > 0$ et la vitesse augmente dans un premier temps en abordant l'obstacle (le corollaire étant que h(x) diminue).

Au sommet de l'obstacle, $\frac{de(x)}{dx} = 0$ et

$$\frac{1}{U(x)}\frac{dU(x)}{dx}\left\{U^2(x) - gh(x)\right\} = 0$$

L'équation peut être satisfaite soit

i) en annulant la dérivée de la vitesse,

ii) soit en annulant $U^2(x) - gh(x)$

Supposons maintenant que l'écoulement en amont de l'obstacle soit sous-critique comme supposé tout-à-l'heure, et examinons les signes des différents termes de l'équation qui sont imposés par la forme de l'obstacle : de/dx est d'abord positif, puis nul, puis négatif.

		i)			ii)		
de/dx	$(U^2 - gh)dU/dx$	$U^2 - gh$	dU/dx	dh/dx	$U^2 - gh$	dU/dx	dh/dx
+	-	-	+	-	-	+	-
0	0	-	0	0	0	+	-
-	+	-	-	+	+	+	-

D'après les résultats indiqués dans le tableau ci-dessus, nous voyons que dans le premier cas, l'écoulement reste sous-critique, l'épaisseur de la couche de la fluide diminue puis réaugmente et l'écoulement s'accélère sur la face amont de l'obstacle. Au sommet de l'obstacle, la vitesse est maximale, la hauteur minimale, puis après le passage du haut de l'obstacle, le fluide ralentit à nouveau et la profondeur augmente pour en principe retrouver les valeurs amont (!!)
En revanche, dans le second cas, la vitesse augmente suffisamment pour que l'´ecoulement devienne supercritique en aval de l'obstacle. La vitesse continue à augmenter en aval de l'obstacle, la hauteur h(x) diminue et le régime est devenu sur/supercritique avec un nombre de Froude supérieur à 1. Physiquement, plus loin en aval, l'écoulement subira un ressaut hydraulique qui lui permet de redevenir sous-critique. Le retour du fluide à un écoulement plus calme sous forte épaisseur se fera par ce ressaut.
Il existe une analogie entre ces écoulements à surface libre, en "eau peu profonde" où la vitesse de propagation des ondes est liée à la hauteur d'eau et les écoulements de fluides compressibles dans des tuyères de type Laval (convergent-divergent). La densité du fluide joue alors le rôle de la hauteur d'eau et le nombre de Mach, qui est le rapport de la vitesse du fluide à la vitesse du son, joue le même rôle que le nombre de Froude. Si l'écoulement est subsonique ($M < 1$) en amont du col de la tuyère, on peut avoir une onde de choc localisée au col de la tuyère. L'onde de choc peut aussi se localiser plus en aval dans le divergent, en analogie avec le ressaut hydraulique en aval.

Les 2 comportements sont possibles et sont liés à des combinaisons différentes (vitesse, hauteur) pour un même obstacle.

Autre forme
On part des 2 relations :

$$\frac{1}{U(x)}\frac{dU(x)}{dx}\left\{U^2(x) - gh(x)\right\} = -g\frac{de(x)}{dx} < 0$$

et de la conservation des débits volumiques :

$Q = U_0 h_0 = U(x)h(x)$

On élimine d'abord la hauteur h(x)

$$\frac{1}{U(x)}\frac{dU(x)}{dx} - gh(x)\frac{U(x)}{U^2(x)}\frac{dU(x)}{dx} = -g\frac{de(x)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dU^2(x)}{dx} - gQ\frac{d}{dx}(\frac{1}{U(x)})$$

On intègre cette équation entre un point x1 largement en amont de l'obstacle et un point x2 largement en aval ; il vient :

$$\frac{1}{2}\left(U_1^2 - U_2^2\right) + gQ\left(\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2}\right) = 0$$

Cette équation peut être vérifiée pour :

i) $U_1 = U_2$

Dans ce cas la vitesse en aval de l'obstacle sera la même qu'en amont et la hauteur en aval sera la même qu'en amont :

$$h_1 = h_2$$

ii) deuxième cas de figure :

$$gQ = U_1 U_2 \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)$$

Si on définit des nombres de Froude suivants (mais avec le carré comme définition) :

$$Fr_1 = \frac{U_1^2}{gh_1} = \frac{U_1^2.U_1}{gh_1.U_1} = \frac{U_1^3}{gQ}$$

$$Fr_2 = \frac{U_2^2}{gh_2} = \frac{U_2^2.U_2}{gh_2.U_2} = \frac{U_2^3}{gQ}$$

L'équation $gQ = U_1 U_2 \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)$ devient, après simplification par gQ, en fait par $((gQ)^{1/3})^3$:

$Fr_1^{1/3}.Fr_2^{1/3}(Fr_1^{1/3} + Fr_2^{1/3}) = 2$.

Dans ce cas de figure, si $Fr_1 < 1$, alors forçément $Fr_2 > 1$.

Sources :

Hulin, Petit & Guyon Hydrodynamique physique, InterEditions, 1991
A.M. Kuethe, C.Y. Chow, *Foundations of Aerodynamics*, J. Wiley (1998).
P.H. Leblond, L.A. Mysak, *Waves in the ocean*, Elsevier (1978).
J. Lighthill, *Waves in fluids*, Cambridge University Press (1978).
H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press (1995).